Génie Mécanique, 5ème Semestre

# EXAMEN FINAL – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2023-2024

DURÉE :2H30MIN

## Instructions :

**Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé**

Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
  - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouges et verts sont réservés pour la correction.**
  - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
  - Une calculatrice est autorisée.

Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
  - Prenez soin de numéroter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

Contenu de l'examen

- Question 1 – 10 points
  - *Page 1*
- Question 2 – 15 points
  - *Page 2*
- Question 3 – 40 points
  - *Page 2*
- Question 4 – 35 points
  - *Page 3*

## QUESTION 1 (10 points)

Une structure peut être modélisée comme un résonateur amorti comme montré dans la Figure 1.1, avec $\eta = 0.01$. On peut considérer que $\eta^2 \ll 1$ pour simplifier les calculs de ce problème. La force maximale que l'on peut appliquer *en statique* sans que la structure ne casse à cause des contraintes internes est $25F_a$. Les conditions initiales sont nulles ($x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$). La force appliquée sur la masse est :

$$F(t) = F_a\big((1 + 2\cos(\omega t))\cos(\omega t) - 1\big)$$

**En fonction du rapport $\frac{k}{m}$ de ce système, calculer de manière approximée la plage des fréquences ($\omega$) à éviter si nous ne voulons pas que la structure casse.**

Astuce : Pour éviter l'utilisation de la calculatrice, vous pouvez laisser le résultat pour $\omega^2$.

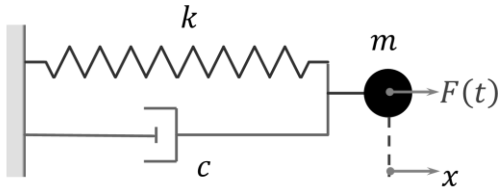


**Figure 1.1 |** Résonateur amorti.

### Solutions

On commence par mettre la force en ses composantes harmoniques :

$$F(t) = F_a(1 + 2\cos(\omega t))\cos(\omega t) = F_a\cos(\omega t) + F_a\cos(2\omega t)$$

Si nous savons que la structure casse en statique quand nous appliquons $50F_a$, ça veut dire que le mouvement en dynamique ne peut pas dépasser $50\frac{F_a}{k}$.

i) Premier harmonique : $\omega$. L'amplitude ici est donnée par

$$X_1 = \frac{F_a}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}} \approx \frac{F_a}{k}\frac{1}{|1-\beta^2|}$$

ii) Deuxième harmonique : $2\omega$. L'amplitude ici est donnée par

$$X_2 = \frac{F_a}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-4\beta^2)^2 + 16\eta^2\beta^2}} \approx \frac{F_a}{k}\frac{1}{|1-4\beta^2|}$$

La pire situation possible sera quand les deux termes harmoniques sont en phase :

$$\frac{X}{F_a/k} = \frac{1}{|1-\beta^2|} + \frac{1}{|1-4\beta^2|} < 25$$

Pour atteindre 50 on doit être très proche de $\beta = 1$ ou de $\beta = 0.5$. Et on peut approximer l'autre terme par zero :

$$\beta \sim 1 \rightarrow \frac{1}{|1-\beta^2|} + \frac{1}{|1-4\beta^2|} \approx \frac{1}{|1-\beta^2|} < 25 \rightarrow 1 - \frac{1}{25} < \beta^2 < 1 + \frac{1}{25}$$

$$\beta \sim 0.5 \rightarrow \frac{1}{|1-\beta^2|} + \frac{1}{|1-4\beta^2|} \approx \frac{1}{|1-4\beta^2|} < 25 \rightarrow 1 - \frac{1}{25} < 4\beta^2 < 1 + \frac{1}{25}$$

Alors :

$$0.24\frac{k}{m} < \omega^2 < 0.26\frac{k}{m} \;\&\&\; 0.96\frac{k}{m} < \omega^2 < 1.04\frac{k}{m}$$

## *QUESTION 2* *(15 points)*

Le système de la Figure 2.1 est une barre de section $A$, de longueur $L$, de module de Young $E$, et de masse volumique $\rho$. La barre est libre sur la droite et reliée à un ressort de raideur $k$ sur la gauche. On est intéressé par les *vibrations longitudinales* dans cette barre.

**i) Écrire l'équation différentielle qui décrit le mouvement de la barre ............................ (3 pts)**

**ii) Écrire les conditions de bord du système.......................................................................... (5 pts)**

**iii) Combien de modes normaux peut-on trouver pour cette poutre ?................................ (2 pts)**

**iv) Écrire le mode et la fréquence propre pour le premier mode quand $k = \frac{EA}{L}\frac{\pi}{4}$............ (5 pts)**

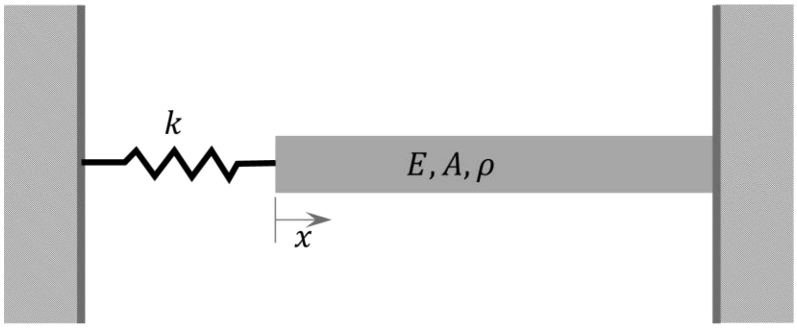


**Figure 2.1 |** Schéma du système, avec la barre dans laquelle l'on étudie les vibrations longitudinales. Sur la gauche, la barre est attachée à un ressort de raideur $k$.

Astuce : Utilisez comme variable $(x - L)$.

## Solution

i) Du formulaire : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

ii) $\left\{\begin{matrix} u(x = L, t) = 0 \\ EA\, u'(x = 0, t) = -ku(x = 0, t) \end{matrix}\right\}$

iii) On peut trouver ∞.

iv)

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right)\right)\cos(\omega_n t) = \left(A'_n \cos\left(\frac{\alpha_n}{L}(x - L)\right) + B'_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{L}(x - L)\right)\right)\cos(\omega_n t)$$

$$u(x = L, t) = 0 \to A'_n = 0$$

$$EAu'(x = 0, t) = -ku(x = 0, t) \to EA\frac{\alpha_n}{L}\cos(\alpha_n) = -k\sin(-\alpha_n)$$

$$\tan(\alpha_n) = \frac{EA}{k}\frac{\alpha_n}{L}$$

Pour le premier mode :

$$\tan(\alpha_1) = \frac{EA}{k}\frac{\alpha_1}{L} \to \tan(\alpha_1) = \frac{EA}{k}\frac{\alpha_1}{L} = \alpha_1\frac{4}{\pi} \to \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_1^2 = \frac{E}{\rho}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{1}{\mathrm{L}^2}$$

$$u_1(x,t) = A'_1 \sin\left(\frac{\pi}{4L}(x - L)\right)\cos(\omega_1 t)$$

## QUESTION 3 (40 points)

On a un système résonant conservatif dont on connait :

- trois vecteurs propres : $\vec{\beta}_I = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ; $\vec{\beta}_{III} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,
- la matrice noyau en coordonnées modales : $\Delta = \frac{k}{m}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$,
- la matrice de masse en coordonnées réelles : $M = m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,
- les conditions initiales : $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ mm; $\overrightarrow{\dot{x}_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

**i)** **Combien de masses a-t-on dans le système?** ............ **(2 pts)**
**ii)** **Trouver $\vec{\beta}_{II}$** ............ **(6 pts)**
**iii)** **Écrire les pulsations propres du système.** ............ **(3 pts)**
**iv)** **Pour chaque mode, écrire la masse et la raideur effective.** ............ **(6 pts)**
**v)** **Comment peut-on calculer la matrice de rigidité en coordonnées réelles ? (Aucun calcul n'est attendu dans cette question)** ............ **(3 pts)**
**vi)** **Écrire le mouvement des modes par rapport au temps.** ............ **(8 pts)**
**vii)** **Écrire le mouvement des masses par rapport au temps.** ............ **(6 pts)**
**viii)** **Trouver les conditions initiales pour avoir du mouvement uniquement à $\omega_{III,0}$ ?** ............ **(3 pts)**
**ix)** **Lesquelles de ces questions ont une réponse unique dans ce problème ?** ............ **(3 pts)**

## Solution

i) On a 3DdL, alors 3 masses dans le système.

ii) $\vec{\beta}_{II}$ est orthogonal aux autres à travers de la matrice de masse.

$$\vec{\beta}_I^T M \vec{\beta}_{II} = \vec{\beta}_{III}^T M \vec{\beta}_{II} = 0$$

$$\vec{\beta}_{II} = \begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} \to \vec{\beta}_I^T m \begin{pmatrix}1\\2x\\y\end{pmatrix} = \vec{\beta}_{III}^T m \begin{pmatrix}1\\2x\\y\end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases}1+2x+y=0\\1-y=0\end{cases} \to \vec{\beta}_{II} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

iii) De la matrice $\Delta$ on obtient directement : $\omega_I = \sqrt{2\frac{k}{m}}$ ; $\omega_{II} = \sqrt{3\frac{k}{m}}$ ; $\omega_{III} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$.

iv) Mode 1 : $m_I = \vec{\beta}_I^T M \vec{\beta}_I = 4m$ ; $k_I = \omega_I^2 m_I = 8k$
Mode 2 : $m_{II} = \vec{\beta}_{II}^T M \vec{\beta}_{II} = 4m$ ; $k_{II} = \omega_{II}^2 m_{II} = 12k$
Mode 3 : $m_{III} = \vec{\beta}_{III}^T M \vec{\beta}_{III} = 2m$ ; $k_{III} = \omega_{III}^2 m_{III} = 8k$

v) Oui, on pourrait, en utilisant : $K = {B^T}^{-1} K_0 B^{-1}$

vi) On commence par mettre les conditions initiales en base modale :

$$\overrightarrow{\dot{x}_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \overrightarrow{\dot{q}_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Pour la position on peut utiliser plusieurs options :

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix}0\\1\text{mm}\\0\end{pmatrix} \to \overrightarrow{x_0} = q_{0,I}\vec{\beta}_I + q_{0,II}\vec{\beta}_{II} + q_{0,III}\vec{\beta}_{III} \to \overrightarrow{q_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\text{mm}$$

Avec les C.I. on peut écrire :

$$\vec{q}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega_I t)\\-\cos(\omega_{II} t)\\0\end{pmatrix}\text{mm}$$

vii) $\vec{x}(t) = B \cdot \vec{q}(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(\omega_I t)\,\vec{\beta}_I - \cos(\omega_{II} t)\,\vec{\beta}_{II}\right)$ mm

viii) Avec des C.I. qui soient proportionnelles à $\vec{\beta}_{III}$

ix) Les réponses à (i), (iii), (v) – mais pas la matrice elle-même, (vii) – sont uniques
Les réponses à (ii), (iv), (vi), (viii) ont plusieurs réponses possibles, tout dépend de la normalisation du vecteur $\vec{\beta}_{II}$ que l'on prend en (ii).

***QUESTION 4*** ***(35 points)***

On a un système composé de ressorts, amortisseurs et masses, avec toutes les masses ayant la même valeur ($m = 1$ kg). Dans la Figure 3.1 on peut voir la partie imaginaire de la fonction de transfert $H(\omega)$ (ou $Y(\omega)$) du système pour les composantes : $h_{11}, h_{12}, h_{13}$, et $h_{14}$.

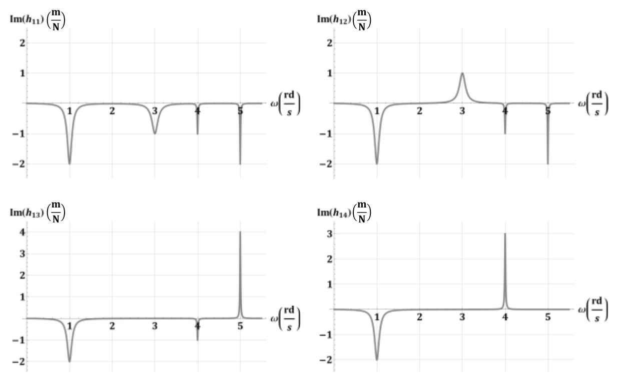


**Figure 3.1 |** Partie imaginaire des fonctions de transfert $h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}$. L'échelle des axes des graphiques est linéaire.

- **i) Combien de DdL a le système ? ............ (1 pts)**
- **ii) Déterminer les pulsations propres .... (4 pts)**
- **iii) Déterminer les vecteurs propres ........ (4 pts)**
- **iv) Déterminer les masses effectives de chaque mode ........................................................... (4 pts)**
- **v) Déterminer les raideurs effectives de chaque mode .............................................. (4 pts)**
- **vi) Déterminer les amortissements relatifs de chaque mode .............................................. (8 pts)**

Si l'on applique une force $F_0 \cos(\omega t)$ sur une seule masse et on est au régime permanent :

- **vii) À quelle fréquence bouge chaque masse ?........................................................ (3 pts)**
- **viii) Si on l'applique dans la 1ère masse, quelle masse bouge le plus ? Cette réponse dépend-elle de $\omega$?........................................ (3 pts)**
- **ix) Si on l'applique dans la 4ème masse, à quelle(s) valeur(s) de $\omega$ aura-t-on le mouvement maximum?........................................ (4 pts)**

**Solution**

i) 4 DdL.

ii) $\omega_I = 1\,\frac{\text{rd}}{\text{s}}, \omega_{II} = 3\,\frac{\text{rd}}{\text{s}}, \omega_{III} = 4\,\frac{\text{rd}}{\text{s}}, \omega_{IV} = 5\,\frac{\text{rd}}{\text{s}}$

iii) $\vec{\beta}_I = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\ \vec{\beta}_{II} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{\beta}_{III} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix};\ \vec{\beta}_{IV} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$

iv) $m_I = 4\text{ kg}, m_{II} = 2\text{ kg}, m_{III} = 12\text{ kg}, m_{IV} = 6\text{ kg}$

v) $k_I = 4\,\frac{\text{N}}{\text{m}}, k_{II} = 18\,\frac{\text{N}}{\text{m}}, k_{III} = 192\,\frac{\text{N}}{\text{m}}, k_{IV} = 150\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$

vi) $\eta_I = \frac{1}{16}, \eta_{II} = \frac{1}{36}, \eta_{III} = \frac{1}{384}, \eta_{IV} = \frac{1}{600}$

vii) Toutes les masses bougent à $\omega$.

viii) Toutes les masses bougent. Ça dépend de la valeur de $\omega$ qu'une masse bougera plus que l'autre.

ix) Si l'on applique dans la 2eme masse, on aura $\vec{F} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\F\end{pmatrix}$ et alors la force sur les modes sera : $\vec{F}^0 = B^T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\F\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F\\0\\-3F\\0\end{pmatrix}$. Alors seulement le 1er et 3ème mode seront excités. Ça veut dire que l'on aura de mouvement harmonique dans ces deux modes et les valeurs maximales on les trouvera pour chaque fréquence propre :

$$mode\ I \rightarrow q_{I,max}(t) \sim \frac{F}{m_I\omega_I^2 2\eta_I}\cos(\omega_I t) = 2F\cos(\omega_I t)$$

$$mode\ III \rightarrow q_{III,max}(t) \sim \frac{3F}{m_{III}\omega_{III}^2 2\eta_{III}}\cos(\omega_{III} t) = 3F\cos(\omega_{III} t)$$

Pour les masses :

$$\omega_I \rightarrow \vec{x} \approx \vec{\beta}_I 2F\cos(\omega_I t)\ \text{ m}$$

$$\omega_{III} \rightarrow \vec{x} \approx \vec{\beta}_{III} 3F\cos(\omega_{III} t)\ \text{ m}$$

D'où on peut voir que la 4eme masse à $\omega_{III}$ montrera le mouvement maximal.